1

FISICA CUANTICA II
EXAMEN DE JUNIO, CUESTIONES

CURSO 2024/2025 26 de Junio de 2025

Los números entre corchetes indican el valor de cada apartado.

Esta prueba cuenta un 25% del examen final.

1[2].- El hamiltoniano de un sistema de dos niveles es:

$$H = -\hbar\alpha\sigma_3 \ ,$$

siendo α una constante real positiva. En el instante inicial $t = 0$ se mide σ_x y se obtiene el valor $+1$. Mas tarde, en el instante $t \geq 0$, se mide σ_y. ¿ Para que valores del tiempo t podemos asegurar con total certeza que el resultado de esta segunda medida es -1?.

2[3].- Considerese el siguiente vector del espacio de Hilbert de una particula moviendose en una dimension:

$$|\psi\rangle = e^{-\gamma X^2} |k\rangle \ ,$$

donde γ es un numero real, X es el operador posicion y $|k\rangle$ es el autovector del operador momento P con autovalor k. Obtengase la funcion de onda correspondiente al vector $|\psi\rangle$ en la representacion de momento.

3[2].- Sean $|n\rangle$ los autoestados del hamiltoniano de un oscilador armonico unidimensional y sea L el operador:

$$L = \sum_{n=1}^{\infty} |n-1\rangle\langle n| \ .$$

Obtengase el resultado de actuar con L sobre el estado:

$$|\phi\rangle = 2\sqrt{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^{n+1}} |n\rangle \ .$$

¿ Es $|\phi\rangle$ un autoestado de L?. En caso de respuesta positiva encuentrese el autovalor correspondiente.

4[3].- La matriz densidad de un sistema de dos niveles es:

$$\rho = C \cdot 2^{\frac{\sigma_+\sigma_-}{4}}$$

Siendo C una constante real y $\sigma_\pm = \sigma_1 \pm i\sigma_2$. Si se mide σ_1 en el sistema, ¿que valores pueden obtenerse y con que probabilidades?.

El hamiltoniano de un sistema de dos niveles es

$$H = -\hbar\alpha\sigma_3$$

siendo α una constante real positiva. En el instante inicial $t=0$ se mide σ_x y se obtiene el valor $+1$. Mas tarde, en el instante $t>0$, se mide σ_y. ¿Para qué valores del tiempo t podemos asegurar con total certeza que el resultado de esta segunda medida es -1?

Estado inicial $\Rightarrow$ $|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

Evolucion temporal:

$$|\psi(t)\rangle = \exp\left[-\tfrac{i}{\cancel{\hbar}}(-\cancel{\hbar}\alpha\sigma_3)t\right]|\psi(0)\rangle =$$

$$= \exp\left[i\alpha\sigma_3 t\right]|\psi(0)\rangle = \left(\cos(\alpha t) + i\,\mathrm{sen}(\alpha t)\,\sigma_3\right)|\psi(0)\rangle =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\cos(\alpha t)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \frac{i}{\sqrt{2}}\mathrm{sen}(\alpha t)\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \leftarrow \sigma_3\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}e^{i\alpha t}\\e^{-i\alpha t}\end{pmatrix}}$$

Buscamos t para que $|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\theta}\begin{pmatrix}i\\1\end{pmatrix} = |-y\rangle$

Como $|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\alpha t}\begin{pmatrix}e^{2i\alpha t}\\1\end{pmatrix} \Rightarrow e^{2i\alpha t} = i$

$$\Rightarrow 2\alpha t_n = \pi/2 + 2\pi n \Rightarrow$$

$$\boxed{\alpha t_n = \pi/4 + n\pi} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

3

Considerese el siguiente vector del espacio de Hilbert de una particula moviendose en una dimension:

$$|\psi\rangle = e^{-\gamma^2 X^2}|k\rangle$$

donde $\gamma \in \mathbb{R}$, X es el operador posicion y $|k\rangle$ es el autovector del operador momento P con autovalor k. Obtengase la funcion de onda correspondiente al vector $|\psi\rangle$ en la representacion de momento.

$$\tilde{\psi}(p) = \langle p|\psi\rangle = \langle p|e^{-\gamma^2X^2}\underset{\uparrow\ \int dx\,|x\rangle\langle x|}{}|k\rangle =$$

$$= \int dx\, \underbrace{\langle p|e^{-\gamma^2X^2}|x\rangle}_{e^{-\gamma^2x^2}\langle p|x\rangle = \frac{e^{-\gamma^2x^2}}{\sqrt{2\pi\hbar}}e^{-i/\hbar\, px}}\ \underbrace{\langle x|k\rangle}_{\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}e^{i/\hbar\, kx}}$$

$$\Rightarrow \tilde{\psi}(p) = \frac{1}{2\pi\hbar}\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{-\gamma^2x^2}e^{i/\hbar\,(k-p)x} \underset{y = x/\hbar}{=}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} dy\, e^{-\hbar^2\gamma^2x^2}e^{i(k-p)y}}$$

$$\sqrt{2\pi}\,F\left(e^{-\hbar^2\gamma^2x}, k-p\right) = \cancel{\sqrt{2\pi}}\,\frac{1}{\hbar\gamma\cancel{\sqrt{2}}}\,e^{-\frac{(k-p)^2}{4\hbar^2\gamma^2}}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sqrt{\pi}\,\frac{1}{\hbar\gamma}\,e^{-\frac{(k-p)^2}{4\hbar^2\gamma^2}} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi}\,\hbar\gamma}\,e^{-\frac{(k-p)^2}{4\hbar^2\gamma^2}} \Longrightarrow$$

$$\boxed{\tilde{\psi}(p) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\,\hbar\gamma}\,e^{-\frac{(k-p)^2}{4\hbar^2\gamma^2}}}$$

(5)

Sean $|n\rangle$ los autoestados del hamiltoniano de un oscilador armonico unidimensional y sea L el operador

$$L = \sum_{n=1}^{\infty} |n-1\rangle\langle n|$$

Obtengase el resultado de actuar con L sobre el estado

$$|\phi\rangle = 2\sqrt{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^{n+1}} |n\rangle$$

¿Es $|\phi\rangle$ un autoestado de L?. En caso de respuesta positiva encuentrese el autovalor correspondiente

---

$$L|\phi\rangle = 2\sqrt{2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^{n+1}} |m-1\rangle \underbrace{\langle m|n\rangle}_{\delta_{mn}} =$$

$$= 2\sqrt{2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{3^{m+1}} |m-1\rangle \underset{\uparrow}{=} 2\sqrt{2} \sum_{m'=0}^{\infty} \frac{1}{3^{m'+2}} |m'\rangle =$$

$m' = m-1 \Rightarrow m = m'+1$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ m' \to m}}{=} \frac{2\sqrt{2}}{3} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{3^{m+1}} |m\rangle = \frac{1}{3} |\phi\rangle \Longrightarrow$$

$$\boxed{L|\phi\rangle = \frac{1}{3}|\phi\rangle}$$

$|\phi\rangle \rightarrow$ autovector de L con autovalor $\frac{1}{3}$

La matriz densidad de un sistema de dos niveles es:

$$\rho = C\, 2^{\frac{\sigma_+\sigma_-}{4}}$$

siendo C una constante real y $\sigma_\pm = \sigma_x \pm i\sigma_y$. Si se mide σ_x en el sistema, ¿qué valores pueden obtenerse y con qué probabilidades

$$\sigma_+ = \sigma_x + i\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_- = (\sigma_+)^+ \Rightarrow \sigma_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \sigma_+\sigma_- = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{\sigma_+\sigma_-}{4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \underline{\text{diagonal}} \Rightarrow$$

$$2^{\frac{\sigma_+\sigma_-}{4}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow Tr\left(2^{\frac{\sigma_+\sigma_-}{4}}\right) = 3$$

$$Tr\,\rho = 1 \Rightarrow C = 1/3 \Rightarrow \boxed{\rho = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

Valores al medir $\sigma_x \Rightarrow \pm 1 \Rightarrow$

$\boxed{\sigma_x = +1}$ $\quad |+x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad |-x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$p(+x) = \langle +x|\rho|+x\rangle = \frac{1}{2}\frac{1}{3}(1,1)\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1/6\,(1,1)\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= 1/6\,(2+1) = 3/6 = 1/2 \Rightarrow \boxed{p(+x) = 1/2}$$

$\boxed{\sigma_x = -1}$ $\quad p(-x) = \langle -x|\rho|-x\rangle = \frac{1}{2}\frac{1}{3}(1,-1)\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} =$

$$= 1/6\,(1,-1)\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 1/6\,(2+1) = 3/6 = 1/2 \Rightarrow \boxed{p(-x) = 1/2}$$